



УДК: 62-50

MSC 2010: 70Qxx, 70Q05

## Анализ предельных возможностей противоударной изоляции при кратковременных внешних воздействиях

Н. Н. Болотник, В. А. Корнеев

На модели с одной степенью свободы исследуется зависимость оптимального качества противоударной изоляции объекта, расположенного на подвижном основании, от формы ударного воздействия (внешнего возмущения), которому подвергается основание. Под формой ударного воздействия понимается конкретный вид зависимости ускорения основания, вызванного ударом, от времени. Противоударный изолятор управляется силой, действующей между объектом и основанием. На управляющую силу наложено ограничение по абсолютной величине. Критерием качества изоляции служит максимум модуля смещения объекта относительно основания. Рассмотрены возмущения конечной продолжительности, которые не изменяют направления своего действия и превышают максимально допустимую величину абсолютного ускорения изолируемого объекта не более, чем на одном интервале времени. Изменение скорости основания в результате удара считается заданным. Установлено, что для возмущений достаточно малой продолжительности, независимо от их формы, оптимальное управление осуществляется постоянной силой, действующей от момента прихода возмущения до момента прекращения движения объекта относительно основания. Выделен класс возмущений, внутри которого оптимальное управление и оптимальное значение критерия качества противоударной изоляции не зависят от формы возмущения. Исследована зависимость минимального значения максимального смещения объекта относительно основания, вычисленного при ограниченной управляющей силе, действующей на изолируемый объект, от формы внешнего воздействия для некоторых параметрических семейств возмущений.

Ключевые слова: противоударная изоляция, оптимальное управление, анализ предельных возможностей

Получено 11 августа 2014 года

После доработки 17 ноября 2014 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ (14-01-00356 а, 13-01-00384 а).

Болотник Николай Николаевич

[bolotnik@ipmnet.ru](mailto:bolotnik@ipmnet.ru)

Корнеев Всеслав Александрович

[korneev@ipmnet.ru](mailto:korneev@ipmnet.ru)

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)  
119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1

## Введение

Проблема оптимального управления системой противоударной изоляции объекта, расположенного на подвижном основании, была поставлена в шестидесятые годы прошлого столетия. Математическую формулировку соответствующей задачи предложил В. В. Гурецкий [1] для системы с одной степенью свободы в случае внешнего воздействия кинематического типа, которое характеризуется ускорением основания, заданным как функция времени. Предполагалось, что основание и защищаемый объект движутся вдоль одной прямой. Требовалось минимизировать максимум модуля смещения объекта относительно основания при условии, что управляющая сила, создаваемая изолирующим устройством между основанием и объектом, не превышает по абсолютной величине заданного значения. В. В. Гурецким был разработан графоаналитический метод решения этой задачи, а также даны аналитические решения для некоторых внешних воздействий специального вида [1, 2]. Эта же задача решалась американскими учеными, которым принадлежит первая монография по проблеме оптимальной изоляции объектов от ударов и вибраций [3]. По-видимому, Е. Севин и У. Пилки [3] пришли к задаче оптимальной противоударной изоляции независимо от В. В. Гурецкого. К настоящему времени решено достаточно большое количество задач оптимальной противоударной изоляции для заданного внешнего воздействия, а также задач оптимальной гарантированной защиты от внешних воздействий, принадлежащих известному классу, разработаны численные методы решения задач оптимальной противоударной изоляции систем со многими степенями свободы. Кроме книги [3], основы теории оптимальной противоударной изоляции систематически изложены в книгах [4–7]. Монографии [4–6] ориентированы на проблемы противоударной изоляции технических объектов, в монографии [7] рассматриваются проблемы травмозащиты людей-операторов, находящихся в условиях повышенной удароопасности (в частности, спортсменов, водителей и пассажиров автомобилей, пилотов вертолетов). В книге [6] дается аналитический обзор публикаций, посвященных оптимальной противоударной изоляции, а также приводится обширный библиографический список по данной проблеме.

Важной и до сих пор не решенной до конца проблемой является анализ чувствительности качества противоударной изоляции к форме ударного возмущения при некоторых известных характеристиках удара, в частности, при изменении скорости основания в результате возмущения. Под формой возмущения здесь понимается конкретная зависимость ускорения основания от времени, характеризующая удар. Поясним сказанное. Пусть, например, основанием является движущийся автомобиль (точнее, его салон), защищаемыми объектами — водитель и пассажиры; роль противоударных изоляторов играют ремни и подушки безопасности. Допустим, что автомобиль наезжает на неподвижное препятствие и в результате удара останавливается. Из параметров удара проще всего измеряется скорость наезда на препятствие. Ее можно с достаточно высокой точностью определить до столкновения. Эта скорость равна взятому с противоположным знаком интегралу ускорения основания по времени. Сама же зависимость ускорения основания от времени зависит от многих причин, и определить ее заранее практически невозможно. При теоретическом анализе и расчетах ударное возмущение, как правило, моделируется функциями, графики которых имеют простой вид (например, прямоугольника, треугольника или полуволны синуса). Для этих воздействий и рассчитываются оптимальные законы управления противоударными изоляторами. Представляет практический интерес ответ на вопрос, насколько велик разброс значений максимального смещения защищаемого объекта при варьировании формы возмущений, приводящих к одному и тому же изменению скорости основания, при управлении,

рассчитанном для возмущения конкретной формы. Интересной задачей представляется также выделение класса возмущений, внутри которого оптимальное управление и оптимальное значение критерия качества противоударной изоляции не зависят от формы возмущения. Решение этих проблем частично дается в данной статье.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается механическая система (рис. 1), состоящая из жесткого основания и объекта, связанного с основанием посредством противоударного изолятора — устройства, которое создает управляющую силу  $f$  между основанием и объектом и служит для снижения нагрузки на объект в случае ударного воздействия на основание. Предполагается, что основание и объект движутся поступательно вдоль одной и той же прямой. Обозначим:  $z$  — смещение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета,  $x$  — смещение объекта относительно основания,  $m$  — масса объекта. Ударное воздействие на основание моделируется его ускорением  $\ddot{z}$ , заданным как функция времени.

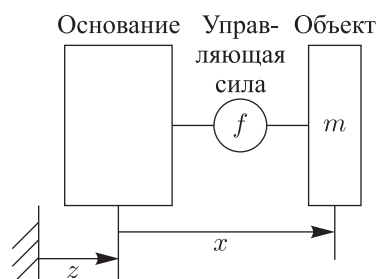


Рис. 1. Модель противоударной изоляции объекта на подвижном основании.

Движение объекта относительно основания описывается уравнением

$$\ddot{x} + u = v(t), \quad u = \frac{f}{m}, \quad v = -\ddot{z}. \quad (1.1)$$

Величина  $-u$  есть ускорение объекта относительно неподвижной системы отсчета, то есть его абсолютное ускорение.

Полагаем, что в начальный момент времени объект покоится относительно основания в положении, отвечающем нулевому значению координаты  $x$ ,

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (1.2)$$

и что возмущение  $v(t)$  имеет вид

$$v(t) = V(t - t_0), \quad t_0 \geq 0, \quad (1.3)$$

где кусочно-непрерывная функция  $V(\xi)$  определена для всех вещественных  $\xi$ , причем  $V(\xi) \equiv 0$  для  $\xi < 0$ , а  $t_0$  — некоторый момент времени, который может быть задан или подлежать выбору. Такое определение соответствует ситуации, когда возмущение  $v$  начинает действовать на основание спустя время  $t_0$  после включения системы противоударной изоляции, то есть допускается возможность упреждающего управления.

В качестве допустимых управлений будем рассматривать кусочно-непрерывные функции  $u(t)$ , удовлетворяющие ограничению  $|u(t)| \leq u_0$ .

Обозначим через  $x_u(t; t_0)$  решение уравнения (1.1) с начальными условиями (1.1) при  $v(t)$  вида (1.3) и поставим для рассматриваемой системы задачу оптимальной противоударной изоляции.

**Задача 1.** Для системы (1.1) с начальными условиями (1.2) и возмущением вида (1.3) найти кусочно-непрерывное управление  $u(t)$ , удовлетворяющее ограничению

$$|u(t)| \leq u_0, \quad t \in [0, \infty), \quad (1.4)$$

и время упреждения  $t_0$ , при которых максимум модуля смещения объекта относительно основания

$$J(u, t_0) = \max_{t \in [0, \infty)} |x_u(t; t_0)| \quad (1.5)$$

принимает минимальное значение.

Величина  $J(u, t_0)$  характеризует размер рабочей зоны, которая должна быть отведена изолятору на основании для того, чтобы абсолютное ускорение объекта не превышало величины  $u_0$ , при которой гарантируется физическая и функциональная целостность объекта. Таким образом, задача 1 отвечает минимизации размера рабочей зоны противоударного изолятора при условии, что сила, с которой изолятор действует на объект, не превышает заданной предельно допустимой величины.

В дальнейшем рассматривается частный случай этой задачи, когда упреждения нет и  $t_0 = 0$ , то есть  $v(t) = V(t)$ . Значение  $t_0$  в списке аргументов величин, зависящих от этого параметра, в дальнейшем опускается, то есть вместо  $x_u(t; 0)$  и  $J(u, 0)$  будем писать  $x_u(t)$  и  $J(u)$  соответственно.

## 2. Внешние возмущения

Ограничимся классом кусочно-непрерывных возмущений  $V(t)$ , обладающих следующими свойствами:

1.  $V(t) \geq 0$ ,
2. возмущение имеет конечную длительность  $T$ :  $V(t) \equiv 0$ , если  $t < 0$  или  $t > T$ ,
3.  $V(t) < u_0$  при  $0 \leq t < t_1$  и  $t_2 < t \leq T$ ;  $V(t) > u_0$  при  $t_1 < t < t_2$ .

Перечисленные свойства означают, что возмущение действует только в одну сторону, не изменяясь в знаке, и что на одном и только одном интервале  $t_1 < t < t_2$  абсолютное ускорение основания  $V(t)$  превышает величину  $u_0$ , максимально допустимую для абсолютного ускорения защищаемого объекта. Отметим, что один или оба из интервалов  $0 \leq t < t_1$  и  $t_2 < t \leq T$  могут быть пустыми, если  $V(0) > u_0$  или  $V(T) > u_0$ .

Случай, когда  $V(t) \leq u_0$  при  $0 \leq t \leq T$ , не рассматривается. В этом случае оптимальным управлением является управление  $u(t) \equiv V(t)$ , обеспечивающее нулевое смещение объекта относительно основания. Известно, что такое управление можно реализовать с помощью устройства, обладающего характеристикой сухого трения:  $u = u_0 \operatorname{sign} \dot{x}$ , если  $\dot{x} \neq 0$ ;  $u = V$ , если  $\dot{x} = 0$  и  $V \leq u_0$ ;  $u = u_0 \operatorname{sign} V$ , если  $\dot{x} = 0$  и  $V > u_0$ . Управление с характеристикой сухого трения обеспечивает нулевое смещение объекта относительно основания при любом возмущении  $V(t)$ , удовлетворяющем неравенству  $V(t) \leq u_0$  при  $0 \leq t \leq T$ .

Основными характеристиками ударного воздействия являются его длительность  $T$  и интеграл

$$v_0 = \int_0^T V(t) dt, \quad (2.1)$$

характеризующий величину скорости, потерянной (или приобретенной) основанием в результате удара. В дальнейшем параметры  $T$  и  $v_0$  считаются известными.

### 3. Кратковременные возмущения

Покажем, что если длительность возмущений достаточно мала, то оптимальным управлением в задаче 1 при  $t_0 = 0$  будет управление, при котором объект движется с постоянным абсолютным ускорением, максимально допустимым по величине, от момента  $t = 0$  до положительного момента времени  $T_c$ , в который скорость объекта относительно основания обращается в нуль. Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Если

$$T < (\sqrt{2} - 1)v_0/u_0, \quad (3.1)$$

то управление

$$u_*(t) = \begin{cases} u_0, & 0 \leq t \leq T_c, \\ 0, & t > T_c, \end{cases} \quad T_c = \frac{v_0}{u_0} \quad (3.2)$$

есть оптимальное управление, при этом минимум максимальной величины смещения объекта относительно основания определяется выражением

$$J(u_*) = x_{u_*}(T_c) = \int_0^{T_c} (T_c - \tau)(v(\tau) - u_0) d\tau. \quad (3.3)$$

*Доказательство утверждения 1.* Решение уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) при произвольном управлении  $u = u(t)$  представляется в виде

$$x_u(t) = \int_0^t (t - \tau)(v(\tau) - u(\tau)) d\tau, \quad (3.4)$$

а в частном случае, для  $u = u_*(t)$ , — в виде

$$x_{u_*}(t) = \begin{cases} \int_0^t (t - \tau)(v(\tau) - u_0) d\tau, & 0 \leq t \leq T_c, \\ x_{u_*}(T_c), & t > T_c. \end{cases} \quad (3.5)$$

Если выполнено неравенство (3.1), то

$$T < T_c. \quad (3.6)$$

Поскольку на управление  $u$  наложено ограничение (1.4), на интервале  $[0, T_c]$  выполнено неравенство  $x_{u_*}(t) \leq x_u(t)$  и, следовательно,

$$x_{u_*}(T_c) \leq x_u(T_c). \quad (3.7)$$

Величина  $x_{u_*}(T_c)$  — положительна. Действительно, преобразуя интеграл в (3.5) с учетом свойств функции  $V(t)$ , перечисленных в разделе 2, и равенства (2.1), получаем

$$x_{u_*}(T_c) = \frac{v_0^2}{2u_0} - \int_0^T \tau v(\tau) d\tau. \quad (3.8)$$

Используя теперь равенство (2.1) и неравенство  $T < v_0/(2u_0)$ , вытекающее из (3.1), приходим к оценке

$$x_{u_*}(T_c) > \frac{v_0^2}{2u_0} - T \int_0^T v(\tau) d\tau = \frac{v_0^2}{2u_0} - v_0 T > 0. \quad (3.9)$$

Из неравенств (3.7) и (3.9) вытекает, что для любого допустимого управления  $u(t)$  выполнено неравенство

$$J(u) = \max_{t \in [0, \infty]} |x_u(t)| \geq x_u(T_c) \geq x_{u_*}(T_c). \quad (3.10)$$

Докажем, что  $J(u_*) = x_{u_*}(T_c)$ , и, тем самым, с учетом (3.10), докажем утверждение 1. С учетом свойств функции  $V(t)$ , перечисленных в разделе 2, из (3.5) вытекают неравенства

$$x_{u_*}(t) < 0, \quad \dot{x}_{u_*}(t) < 0, \quad 0 < t < t_1, \quad (3.11)$$

$$\ddot{x}_{u_*}(t) < 0, \quad 0 < t < t_1, \quad t_2 < t \leq T_c, \quad \ddot{x}_{u_*}(t) > 0, \quad t_1 < t < t_2. \quad (3.12)$$

Из (3.11) следует, что функция  $x_{u_*}(t)$  монотонно убывает на интервале  $(0, t_1)$  и не имеет точек экстремума на этом интервале. Из (3.12) вытекает, что функция  $x_{u_*}(t)$  вогнута на интервалах  $0 < t < t_1$  и  $t_2 < t \leq T_c$  и выпукла на интервале  $t_1 < t < t_2$ . На каждом интервале выпуклости (вогнутости) функция может иметь только один экстремум, и этот экстремум — минимум (максимум).

Из (3.5) с учетом соотношений (2.1) и (3.6) имеем  $\dot{x}_{u_*}(T_c) = 0$ , то есть  $T_c$  — единственная точка максимума функции  $x_{u_*}(t)$  на интервале  $[0, T_c]$ . Поскольку  $x_{u_*}(0) = 0$ ,  $x_{u_*}(T_c) > 0$  и  $x_{u_*}(t) \equiv x_{u_*}(T_c)$  для  $t > T_c$ , имеем

$$\max_{t \in [0, \infty]} x_{u_*}(t) = x_{u_*}(T_c). \quad (3.13)$$

Функция  $x_{u_*}(t)$  может иметь единственный минимум, который находится на интервале  $(t_1, t_2)$ , принадлежащем отрезку  $[0, T]$ . На интервале  $[0, T]$  имеет место следующая оценка снизу для функции  $x_{u_*}(t)$ :

$$x_{u_*}(t) \geq - \int_0^t (t - \tau) u_0 d\tau = - \frac{u_0 t^2}{2} \geq - \frac{u_0 T^2}{2}, \quad t \in [0, T]. \quad (3.14)$$

Поскольку минимум функции  $x_{u_*}(t)$ , достигаемый на отрезке  $[0, T]$ , единственный и, следовательно, абсолютный, из неравенства (3.14) вытекает оценка

$$\min_{t \in [0, \infty]} x_{u_*}(t) \geq -\frac{u_0 T^2}{2}. \quad (3.15)$$

Учитывая соотношения (3.9) и (3.13), имеем

$$J(u_*) = \max_{t \in [0, \infty]} |x_{u_*}(t)| = \max \left[ x_{u_*}(T_c), -\min_{t \in [0, \infty]} x_{u_*}(t) \right] \quad (3.16)$$

и, следовательно,  $J(u_*) = x_{u_*}(T_c)$ , если

$$x_{u_*}(T_c) > -\min_{t \in [0, \infty]} x_{u_*}(t). \quad (3.17)$$

Из (3.9) и (3.15) вытекает, что достаточным условием неравенства (3.17) служит неравенство

$$\frac{v_0^2}{2u_0} - Tv_0 - \frac{u_0 T^2}{2} > 0, \quad (3.18)$$

которое выполнено, если выполнено соотношение (3.1). Утверждение 1 доказано. ■

Оценим разброс значений  $J(u_*)$ , который может наблюдаться при фиксированных значениях величин  $v_0$ ,  $T$  и  $u_0$ , удовлетворяющих неравенству (3.1), из-за различия в форме внешнего возмущения  $v(t)$ . Для этого воспользуемся соотношениями (3.3) и (3.8). С учетом (2.1) интеграл в (3.8) удовлетворяет двустороннему неравенству

$$0 \leq \int_0^T \tau v(\tau) d\tau \leq Tv_0, \quad (3.19)$$

откуда получаем

$$\frac{v_0^2}{2u_0} - Tv_0 = J_{\inf} \leq J(u_*) \leq J_{\sup} = \frac{v_0^2}{2u_0}. \quad (3.20)$$

Граничные значения  $J_{\inf}$  и  $J_{\sup}$  достигаются в предельных случаях мгновенных ударов  $v(t) = v_0 \delta(t - T)$  и  $v(t) = v_0 \delta(t)$ , происходящих в моменты времени  $t = T$  и  $t = 0$  соответственно; здесь через  $\delta(\xi)$  обозначена дельта-функция Дирака. Вычислив отношение  $J_{\sup}/J_{\inf}$ , получим

$$\frac{J_{\sup}}{J_{\inf}} = \left( 1 - \frac{2Tu_0}{v_0} \right)^{-1} \leq 3 + 2\sqrt{2} \approx 5.83. \quad (3.21)$$

Эта оценка получена исходя из неравенства (3.1) и принципиально неупрощаема, если информация о внешнем возмущении ограничивается его длительностью  $T$  и величиной  $v_0$ , характеризующей изменение скорости основания в результате удара. В этом случае рабочее пространство, требуемое для работы противоударного изолятора, нужно определять в расчете на наихудшее из возможных возмущений.

#### 4. Кратковременные возмущения «симметричной» формы

Под возмущениями симметричной формы будем понимать воздействия, характеризуемые функцией  $V(t)$ , для которой, кроме свойств, перечисленных в разделе 2, выполнено равенство

$$V(t) = V(T - t). \quad (4.1)$$

В этом случае график функции  $V(t)$  на координатной плоскости  $(t, V)$  симметричен относительно оси, проходящей через точку  $(T/2, 0)$  параллельно координатной оси  $V$ .

Для задачи 1 в случае воздействия симметричной формы справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Если

$$T < 2(\sqrt{2} - 1)v_0/u_0, \quad (4.2)$$

то управление

$$u_*(t) = \begin{cases} u_0, & 0 \leq t \leq T_c, \\ 0, & t > T_c, \end{cases} \quad T_c = \frac{v_0}{u_0} \quad (4.3)$$

есть оптимальное управление, при этом минимум максимальной величины смещения объекта относительно основания определяется выражением

$$J(u_*) = x_{u_*}(T_c) = \frac{v_0}{2} \left[ \frac{v_0}{u_0} - T \right]. \quad (4.4)$$

Утверждение 2 отличается от утверждения 1, во-первых, тем, что оптимальное управление вида (4.3) в случае воздействий симметричной формы гарантируется для вдвое более широкого интервала длительностей возмущений  $T$ , чем в общем случае, и, во-вторых, тем, что оптимальное значение (4.4) минимизируемого функционала зависит только от величин  $v_0$ ,  $T$  и  $u_0$ , не зависит от формы возмущения и дается аналитическим выражением.

Прежде чем доказывать утверждение 2, докажем простую лемму.

**Лемма.** Если функция  $v(t)$  удовлетворяет равенству (4.1), то

$$\int_0^T \tau v(\tau) d\tau = \frac{T v_0}{2}, \quad (4.5)$$

где величина  $v_0$  определяется интегралом (2.1).

*Доказательство леммы.* Из условия (4.1) вытекает равенство

$$\int_0^T \tau v(\tau) d\tau = \int_0^T \tau v(T - \tau) d\tau. \quad (4.6)$$

Обозначим левую часть равенства (4.6) через  $I$ . Заменой переменной  $\xi = T - \tau$  в правой части с учетом соотношения (2.1) равенство (4.6) приводится к виду  $I = T v_0 - I$ . Разрешив это уравнение относительно  $I$ , приходим к соотношению (4.5). Лемма доказана. ■

Используя эту лемму, выражение (3.8) для  $x_{u_*}(T_c)$  можно преобразовать к виду

$$x_{u_*}(T_c) = \frac{v_0}{2} \left[ \frac{v_0}{u_0} - T \right] > 0, \quad (4.7)$$

где неравенство следует из предположения (4.2).



*Доказательство утверждения 2.* До оценки (3.14) доказательство утверждения 2 почти дословно совпадает с доказательством утверждения 1. Надо только заменить ссылки на неравенства (3.1) и (3.9) ссылками на неравенства (4.2) и (4.7) соответственно. Вместо (3.14) для воздействий симметричной формы надо воспользоваться неравенством

$$x_{u*}(t) \geq - \int_0^t (t - \tau) u_0 d\tau = -\frac{u_0 t^2}{2} \geq -\frac{u_0 T^2}{8}, \quad t \in [0, T/2], \quad (4.8)$$

и тем фактом, что минимум функции  $x_{u*}(t)$  в случае воздействия симметричной формы достигается на отрезке  $[0, T/2]$ . Действительно, как следует из (3.12), точка минимума функции  $x_{u*}(t)$  может принадлежать только интервалу  $(t_1, t_2)$ , на котором производная  $\dot{x}_{u*}(t)$  монотонно возрастает. Для внешнего воздействия симметричной формы выполняются неравенства  $t_1 < T/2$ ,  $t_2 = T - t_1$  и, следовательно,  $T/2 \in (t_1, t_2)$ . Дифференцируя выражение (3.5) в точке  $t = T/2$ , получим

$$\dot{x}_{u*}(T/2) = \int_0^{T/2} v(\tau) d\tau - \frac{u_0 T}{2}. \quad (4.9)$$

Для воздействия симметричной формы с учетом равенства (2.1) имеем

$$\int_0^{T/2} v(\tau) d\tau = \frac{v_0}{2}. \quad (4.10)$$

Подстановка (4.10) в (4.9) дает

$$\dot{x}_{u*}(T/2) = (v_0 - u_0 T)/2 > 0, \quad (4.11)$$

где неравенство вытекает из предположения (4.2). Так как  $\ddot{x}_{u*}(t) > 0$  на интервале  $(t_1, t_2) \ni T/2$ , необходимое условие минимума  $\dot{x}_{u*}(t) = 0$  может быть выполнено только при  $t < T/2$ . Следовательно, минимум функции  $x_{u*}(t) > 0$  достигается на отрезке  $[0, T/2]$ . Тогда с учетом (4.8) имеем

$$\min_{t \in [0, \infty]} x_{u*}(t) \geq -\frac{u_0 T^2}{8}. \quad (4.12)$$

На основании соотношений (4.12) и (4.7) приходим к выводу, что неравенство (3.17), из которого следуют оптимальность управления (4.3) и выражение (4.4), выполнено, если

$$\frac{v_0^2}{2u_0} - \frac{Tv_0}{2} - \frac{u_0 T^2}{8} > 0. \quad (4.13)$$

В предположении (4.2) это неравенство справедливо. Утверждение 2 доказано. ■

## 5. Модельные возмущения специального вида

Рассмотрим и сравним три типа возмущений, которые часто используются для моделирования внешних воздействий в задачах противоударной изоляции: возмущение в виде полуволны синуса, возмущение прямоугольной формы и возмущение треугольной формы. Будем снабжать величины, относящиеся к этим типам возмущений, индексами 1, 2 и 3 соответственно.

Возмущения в виде полуволны синуса (рис. 2), прямоугольной формы (рис. 3) и треугольной формы (рис. 4) задаются, соответственно, выражениями

$$v = v_1(t) = \begin{cases} \frac{\pi v_0}{2T} \sin \frac{\pi}{T} t, & \text{если } 0 \leq t < T, \\ 0, & \text{если } t \geq T, \end{cases} \quad (5.1)$$

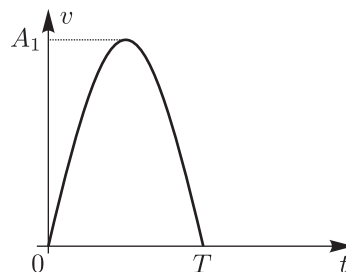


Рис. 2. Возмущение в форме полуволны синуса.

$$v = v_2(t) = \begin{cases} \frac{v_0}{T}, & \text{если } 0 \leq t < T, \\ 0, & \text{если } t \geq T, \end{cases} \quad (5.2)$$

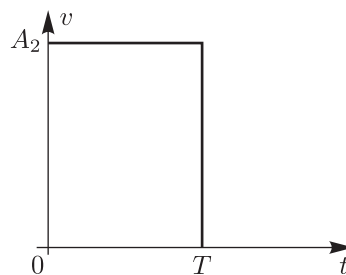


Рис. 3. Возмущение прямоугольной формы.

$$v = v_3(t) = \begin{cases} \frac{2v_0}{Tb} t, & \text{если } 0 \leq t < b, \\ \frac{2v_0}{T(T-b)} (T-t), & \text{если } b \leq t < T, \\ 0, & \text{если } t \geq T. \end{cases} \quad (5.3)$$

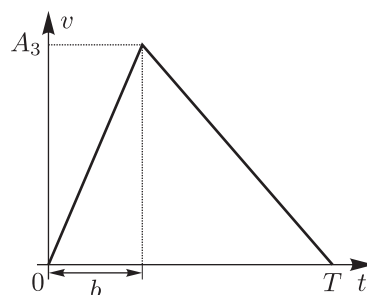


Рис. 4. Возмущение треугольной формы.

Здесь  $T$  и  $v_0$  — длительность возмущения и изменение скорости основания в результате удара, определяемое интегралом (2.1). Возмущения в виде полуволны синуса и возмущения прямоугольной формы ни от каких других параметров не зависят. Эти два типа возмущений удовлетворяют равенству (4.1), то есть имеют симметричную форму.

Выражение (5.3) для возмущения треугольной формы содержит дополнительный параметр  $b$ , принадлежащий отрезку  $[0, T]$ . Этот параметр характеризует расстояние от начала координат плоскости  $(t, v)$  до проекции вершины треугольника, не лежащей на оси  $t$ , на эту ось. При  $b = T/2$  треугольник, характеризующий возмущение, — равнобедренный и возмущение имеет симметричную форму. В остальных случаях форма возмущения (5.3) несимметрична. Если  $b = 0$  или  $b = T$ , то треугольник, характеризующий возмущение, — прямоугольный; при  $b = 0$  вершина прямого угла расположена в начале координат плоскости  $(t, v)$ , а при  $b = T$  — в точке  $(0, T)$ , отвечающей моменту окончания ударного воздействия.

Наряду с величинами  $v_0$  и  $T$  полезно ввести еще одну характеристику внешнего возмущения — его амплитуду, определяемую как максимальное значение функции  $v(t)$  за время действия возмущения. Можно сказать, что эта величина характеризует «пиковую силу» удара, его интенсивность. Амплитуды воздействий (5.1), (5.2) и (5.3) определяются, соответственно, выражениями

$$A_1 = \frac{\pi v_0}{2T}, \quad A_2 = \frac{v_0}{T}, \quad A_3 = \frac{2v_0}{T}. \quad (5.4)$$

### 5.1. Сравнение кратковременных возмущений симметричной формы

Пусть величина  $v_0$  фиксирована и  $b = T/2$  в выражении (5.3) для возмущения треугольной формы, то есть это возмущение симметрично. Пусть, кроме того, длительности возмущений (5.1), (5.2) и (5.3) удовлетворяют неравенству (4.2):  $T < 2(\sqrt{2} - 1)v_0/u_0$ . Тогда, как следует из утверждения 2, если длительности возмущений одинаковы, то минимальные значения максимума модуля смещения объекта относительно основания также одинаковы и определяются равенством (4.4). В этом смысле все три возмущения эквивалентны по своему влиянию на предельные возможности противоударной изоляции.

Пусть теперь эти возмущения имеют равными не длительность  $T$ , а амплитуды, то есть  $A_1 = A_2 = A_3 = A$ .

Разрешая равенства (5.4) относительно  $T$  и подставляя полученные выражения в равенство (4.4), в предположении  $A_1 = A_2 = A_3 = A$ , придем к следующим формулам для оптимальных значений минимизируемого критерия:

$$J^{(1)}(u_*) = \frac{v_0^2}{2u_0} \left[ 1 - \frac{\pi}{2} \frac{u_0}{A} \right], \quad (5.5)$$

$$J^{(2)}(u_*) = \frac{v_0^2}{2u_0} \left[ 1 - \frac{u_0}{A} \right], \quad (5.6)$$

$$J^{(3)}(u_*) = \frac{v_0^2}{2u_0} \left[ 1 - 2 \frac{u_0}{A} \right]. \quad (5.7)$$

Здесь индексы 1, 2 и 3 отвечают возмущениям (5.1), (5.2) и (5.3) соответственно.

Значение амплитуды  $A$  в (5.5)–(5.7) должно быть согласовано с неравенством (4.2). Это неравенство, записанное в терминах амплитуд  $A_1, A_2, A_3$ , имеет вид

$$A_1 > \frac{\pi}{4}(\sqrt{2} + 1)u_0, \quad A_2 > \frac{\sqrt{2} + 1}{2}u_0, \quad A_3 > (\sqrt{2} + 1)u_0. \quad (5.8)$$

Отсюда вытекает, что амплитуда  $A$ , одинаковая для всех трех воздействий, должна удовлетворять неравенству

$$A > (\sqrt{2} + 1)u_0. \quad (5.9)$$

Из (5.5)–(5.7) следует, если все три воздействия (5.1)–(5.3) характеризуются одной и той же амплитудой  $A$ , удовлетворяющей неравенству (5.9), то наименее благоприятным является воздействие прямоугольной формы, а наиболее благоприятным — воздействие треугольной формы.

## 5.2. Аналитическое решение задачи для возмущений прямоугольной формы и для возмущений треугольной формы при $b = 0$

**Утверждение 3.** Пусть функция  $V(t)$ , связанная с возмущением  $v(t)$  равенством (1.3) и совпадающая с  $v(t)$  при  $t_0 = 0$ , обладает свойствами, перечисленными в разделе 2, и, кроме того,  $t_1 = 0$ . Тогда управление

$$u^*(t) = \begin{cases} u_0, & 0 \leq t \leq T^*, \\ v(t), & t > T^*, \end{cases} \quad (5.10)$$

где  $T^*$  — положительный момент обращения в нуль функции  $\dot{x}_u(t)$  при  $u \equiv u_0$ , есть оптимальное управление в задаче 1 при  $t_0 = 0$ . Минимум максимальной величины смещения объекта относительно основания при управлении  $u^*(t)$  определяется выражением

$$J(u^*) = x_{u^*}(T^*) = \int_0^{T^*} (T^* - \tau) (v(\tau) - u_0) d\tau. \quad (5.11)$$

Доказательство данного утверждения опускается. Его можно найти, например, в [7].

Движение объекта относительно основания при управлении (5.10) происходит следующим образом. На интервале времени  $(0, T^*)$  объект движется в положительном направлении оси  $x$ . В момент времени  $T^*$  скорость объекта относительно основания обращается в нуль, и в дальнейшем объект покоится относительно основания в положении  $x_{u^*}(T^*)$ . Отметим, что управление (5.10) в общем случае — не единственное оптимальное управление. Неединственность будет продемонстрирована ниже на примере решения задачи для возмущения треугольной формы.

Для некоторых моделей ударного воздействия  $v(t)$ , удовлетворяющих условиям утверждения 3, удастся построить полное аналитическое решение задачи 1. Из моделей внешнего возмущения, определяемых равенствами (5.1)–(5.3), условиям утверждения 3 удовлетворяют возмущение прямоугольной формы (5.2) и возмущение треугольной формы (5.3) при  $b = 0$ .

Перейдем в задаче 1 к безразмерным (штрихованным) переменным

$$\begin{aligned} x' &= \frac{u_0}{v_0^2} x, & t' &= \frac{u_0}{v_0} t, & T' &= \frac{u_0}{v_0} T, \\ v'(t') &= \frac{1}{u_0} v\left(\frac{v_0}{u_0} t'\right), & u' &= \frac{u}{u_0}, & J' &= \frac{u_0}{v_0^2} J. \end{aligned} \quad (5.12)$$

В безразмерных переменных (штрихи опускаются) задача 1 при  $t_0 = 0$  формулируется следующим образом.

**Задача 2.** Для системы

$$\ddot{x} + u = v(t) \quad (5.13)$$

с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (5.14)$$

найти кусочно-непрерывное управление  $u(t)$ , удовлетворяющее ограничению

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, \infty), \quad (5.15)$$

при котором максимум модуля смещения объекта относительно основания

$$J(u) = \max_{t \in [0, \infty)} |x_u(t)| \quad (5.16)$$

принимает минимальное значение.

Возмущение прямоугольной формы (5.2) и возмущение треугольной формы (5.3) при  $b = 0$  в безразмерных переменных представляются, соответственно, выражениями

$$v = v_2(t) = \begin{cases} A_2, & \text{если } 0 \leq t < \frac{1}{A_2}, \\ 0, & \text{если } t \geq \frac{1}{A_2}, \end{cases} \quad A_2 = \frac{v_0}{Tu_0}, \quad (5.17)$$

$$v = v_3(t) = \begin{cases} A_3 \left(1 - \frac{A_3 t}{2}\right), & \text{если } 0 \leq t < \frac{2}{A_3}, \\ 0, & \text{если } t \geq \frac{2}{A_3}, \end{cases} \quad A_3 = \frac{2v_0}{Tu_0}. \quad (5.18)$$

Таким образом, для рассматриваемых типов возмущений решение задачи зависит только от одного безразмерного параметра,  $A_2$  (для возмущения прямоугольной формы) или  $A_3$  (для возмущения треугольной формы).

Для возмущения прямоугольной формы оптимальное управление  $u^*(t)$ , смещение объекта относительно основания  $x_{u^*}(t)$  и минимум максимума модуля этого смещения  $J(u^*)$  определяются следующими выражениями:

$$u^*(t) = \begin{cases} \min[A_2, 1], & 0 \leq t \leq \max\left[1, \frac{1}{A_2}\right], \\ 0, & t > \max\left[1, \frac{1}{A_2}\right], \end{cases} \quad A_2 > 0, \quad (5.19)$$

$$x_{u^*}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \infty, & \text{если } A_2 \leq 1, \\ \frac{(A_2 - 1)t^2}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{A_2}, & \text{если } A_2 > 1, \\ -\frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2A_2}, & \frac{1}{A_2} < t \leq 1, & \text{если } A_2 > 1, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{A_2}\right), & t > 1, & \text{если } A_2 > 1, \end{cases} \quad (5.20)$$

$$J(u^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq A_2 \leq 1, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{A_2}\right), & \text{если } A_2 > 1. \end{cases} \quad (5.21)$$

Для возмущения треугольной формы при  $b = 0$  соответствующие выражения имеют вид

$$u^*(t) = \begin{cases} A_3 \left(1 - \frac{A_3 t}{2}\right), & 0 < t < \frac{2}{A_3}, & \text{если } A_3 < 1, \\ 1, & 0 \leq t \leq \frac{4(A_3 - 1)}{A_3^2}, & \text{если } 1 \leq A_3 < 2, \\ A_3 \left(1 - \frac{A_3 t}{2}\right), & \frac{4(A_3 - 1)}{A_3^2} \leq t < \frac{2}{A_3}, & \text{если } 1 \leq A_3 < 2, \\ 1, & 0 \leq t \leq 1, & \text{если } A_3 \geq 2, \\ 0, & t > \max \left[1, \frac{2}{A_3}\right] & \text{для любых } A_3 > 0, \end{cases} \quad (5.22)$$

$$x_{u^*}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \infty, & \text{если } A_3 \leq 1, \\ -\frac{t^2}{12} (A_3^2 t - 6A_3 + 6), & 0 \leq t \leq \frac{4(A_3 - 1)}{A_3^2} \leq 1, & \text{если } 1 < A_3 \leq 2, \\ \frac{8(A_3 - 1)^3}{3A_3^4}, & t \geq \frac{4(A_3 - 1)}{A_3^2}, & \text{если } 1 < A_3 \leq 2, \\ -\frac{t^2}{12} (A_3^2 t - 6A_3 + 6), & 0 \leq t \leq \frac{2}{A_3}, & \text{если } A_3 > 2, \\ -\frac{1}{6} \frac{4 - 6tA_3 + 3t^2 A_3}{A_3}, & \frac{2}{A_3} < t \leq 1, & \text{если } A_3 > 2, \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{3A_3}, & t > 1, & \text{если } A_3 > 2. \end{cases} \quad (5.23)$$

$$J(u^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq A_3 \leq 1, \\ \frac{8(A_3 - 1)^3}{3A_3^4}, & \text{если } 1 < A_3 \leq 2, \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{3A_3}, & \text{если } A_3 > 2. \end{cases} \quad (5.24)$$

Если  $A_2 > 1$  или  $A_3 > 2$ , то оптимальное управление  $u^*(t)$ , определяемое равенствами (5.19) или (5.22), совпадает с управлением (3.2), которое в безразмерных переменных представляется в виде

$$u_*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases} \quad (5.25)$$

В терминах амплитуд  $A_2$  или  $A_3$  неравенство (3.1), фигурирующее в утверждении 1, представляется в виде  $A_2 > \sqrt{2} + 1 \approx 2.414$  или  $A_3 > 2(\sqrt{2} + 1) \approx 4.818$ , а неравенство (4.2), фигурирующее в утверждении 2, — в виде  $A_2 > (\sqrt{2} + 1)/2 \approx 1.207$  или  $A_3 > \sqrt{2} + 1 \approx 2.414$ . Эти неравенства гарантируют оптимальность управления (5.25) для любых возмущений, удовлетворяющих условиям соответствующих утверждений. Однако для конкретных возмущений оптимальность управления (5.25) может иметь место для более широкого множества значений параметра  $A_2$  или  $A_3$ . В частности, для возмущения прямоугольной формы,

которое является симметричным, управление (5.25) оптимально при  $A_2 > 1$ , а не только при  $A_2 > (\sqrt{2} + 1)/2$ ; для возмущения треугольной формы при  $b = 0$  это управление оптимально при  $A_3 > 2$ , а не только при  $A_3 > \sqrt{2} + 1$ .

Для возмущения треугольной формы управление (5.25) оптимально и при меньших значениях  $A_3$ , а именно при  $A_3 \geq 1.278$ .

Проанализируем движение объекта относительно основания для треугольного возмущения с  $b = 0$  при управлении (5.25) в случае  $1 < A_3 \leq 2$ . Имеем

$$x_{u_*}(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{12}(A_3^2 t - 6A_3 + 6), & 0 \leq t \leq 1, \\ -\frac{1}{12}(A_3^2 t^3 - 6A_3 t^2 + 12t - 6), & 1 < t \leq 2/A_3, \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{3A_3}, & t > 2/A_3. \end{cases} \quad (5.26)$$

Движение, описываемое выражением (5.26), происходит следующим образом. На интервале времени  $0 < t < T^* = 4(A_3 - 1)/A_3^2$  объект движется с положительной скоростью ( $\dot{x}_{u_*}(t) > 0$ ). В момент времени  $T^*$  скорость  $\dot{x}_{u_*}(t)$  обращается в нуль и величина  $x_{u_*}(t)$  достигает своего максимума, который положителен и определяется формулой

$$x_{u_*}(T^*) = \frac{8(A_3 - 1)^3}{3A_3^4}. \quad (5.27)$$

На интервале  $T^* < t < 2/A_3$  объект движется с отрицательной скоростью ( $\dot{x}_{u_*}(t) < 0$ ). В момент  $t = 2/A_3$  скорость  $\dot{x}_{u_*}(t)$  обращается в нуль и остается равной нулю в дальнейшем. В момент  $t = 2/A_3$  величина  $x_{u_*}(t)$  достигает своего минимума, который определяется формулой

$$x_{u_*}\left(\frac{2}{A_3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3A_3}. \quad (5.28)$$

Если  $x_{u_*}(T^*) > |x_{u_*}(2/A_3)|$ , то  $J(u_*) = J(u^*) = x_{u_*}(T^*)$  и, следовательно, управление (5.25) оптимально наряду с управлением (5.22). Численный анализ показывает, что это неравенство выполняется при  $1.278 \leq A_3 \leq 2$ .

### 5.3. Сравнение качества противоударной изоляции при оптимальном управлении и при управлении с постоянной силой

Сравним во всем диапазоне амплитуд  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  значения функционала  $J(u)$  при оптимальном управлении  $u_{\text{opt}}$ , решающем задачу 2, и при управлении (5.25). Для возмущения прямоугольной формы и треугольной формы при  $b = 0$  оптимальное управление задается выражениями (5.19) и (5.22), а соответствующие значения минимизируемого функционала — выражениями (5.21) и (5.24). При управлении (5.25) для возмущения прямоугольной формы аналитический расчет дает

$$J(u_*) = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{A_2} - 1 \right|. \quad (5.29)$$

Величина  $J(u_*)$  как функция параметра  $A_2$  показана на рисунке 5. Если  $A_2 > 1$ , то величины  $J(u_{\text{opt}})$  и  $J(u_*)$  совпадают, а при  $A_2 \leq 1$  имеем  $J(u_{\text{opt}}) = 0$ .

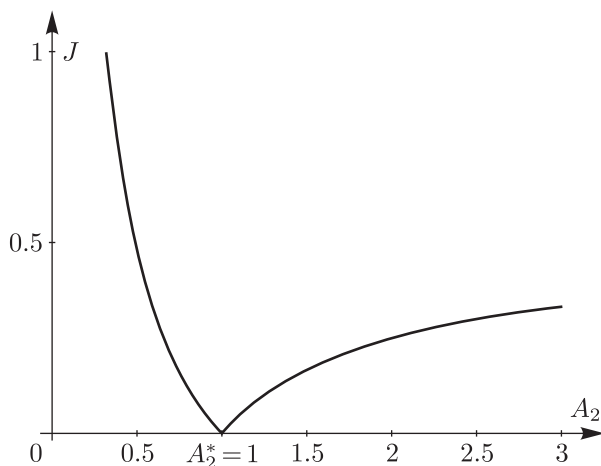


Рис. 5. Значения  $J$  при  $u = u_*$  в зависимости от значения  $A_2$  для возмущения прямоугольной формы.

Для возмущения треугольной формы при  $b = 0$  величина  $J(u_*)$  также рассчитывается аналитически и представляется выражением

$$J(u_*) = \begin{cases} \frac{2}{3A_3} - \frac{1}{2}, & 0 < A_3 \leq A_3^* \approx 1.278, \\ \frac{8(A_3 - 1)^3}{3A_3^4}, & A_3^* < A_3 \leq 2, \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{3A_3}, & A_3 > 2. \end{cases} \quad (5.30)$$

На рисунке 6 изображены величины  $J(u_*)$  (сплошная линия) и  $J(u_{\text{opt}})$  (штриховая линия) как функции параметра  $A_3$ . При  $A_3 \geq A_3^*$  эти величины совпадают, то есть функция  $u_*(t)$  — оптимальное управление.

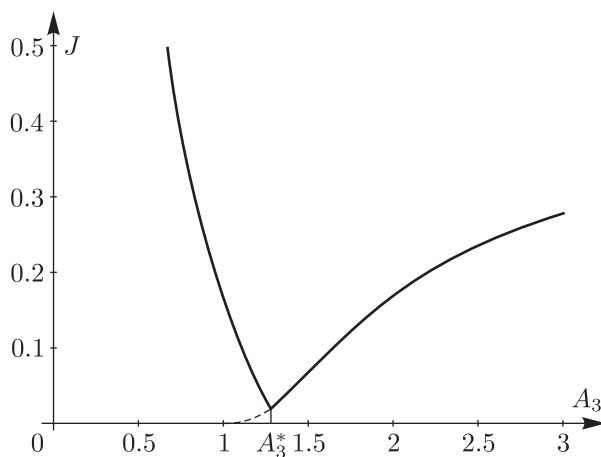


Рис. 6. Значения  $J$  при  $u = u_{\text{opt}}$  и  $u = u_*$  в зависимости от значения  $A_3$  для возмущения треугольной формы в случае  $b = 0$ .



Возмущение в виде полуволны синуса в безразмерных переменных (5.12) представляется следующим образом:

$$v_1(t) = \begin{cases} A_1 \sin 2A_1 t, & \text{если } 0 \leq t < \frac{\pi}{2A_1}, \\ 0, & \text{если } t \geq \frac{\pi}{2A_1}. \end{cases} \quad (5.31)$$

Для такого возмущения величины  $J(u_{\text{opt}})$  и  $J(u_*)$  не выражаются конечными формулами для всех значений параметра  $A_1$ , и для их расчета использовались численные методы. В частности, задача оптимального управления (задача 2), в результате решения которой находится оптимальное значение  $J(u_{\text{opt}})$  минимизируемого функционала, путем дискретизации уравнения движения сводилась к задаче линейного программирования согласно схеме, изложенной в [7]. Эта схема была программно реализована в среде Matlab. Для расчета величины  $J(u_*)$  в аналитической форме решалась задача Коши (5.13), (5.14) при  $v = v_1(t)$  и  $u = u_*(t)$ , в результате чего вычислялась в явной форме функция  $x_{u_*}(t)$ . После этого величина  $J(u_*)$  определялась по формуле

$$J(u_*) = \max_{t \in [0, \bar{T}]} |x_{u_*}(t)| = \max \left[ -\min_{t \in [0, \bar{T}]} x_{u_*}(t), \max_{t \in [0, \bar{T}]} x_{u_*}(t) \right], \quad (5.32)$$

$$\bar{T} = \max[1, \pi/(2A_1)].$$

Максимум и минимум функции  $x_{u_*}(t)$  находились численно. На рисунке 7 изображены величины  $J(u_*)$  (сплошная линия) и  $J(u_{\text{opt}})$  (штриховая линия) как функции параметра  $A_1$ . При  $A_1 \geq A_1^* \approx 1.659$  величины  $J(u_*)$  и  $J(u_{\text{opt}})$  совпадают и, следовательно,  $u_*(t)$  — оптимальное управление. В этом случае оптимальное значение функционала определяется выражением

$$J(u_{\text{opt}}) = J(u_*) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\pi}{2A_1} \right). \quad (5.33)$$

Отметим, что полное решение рассматриваемой задачи для возмущения в форме полуволны синуса известно. Впервые оно построено В. В. Гурецким [2] графоаналитическим методом; более детальное изложение этого решения приведено в монографии [6].

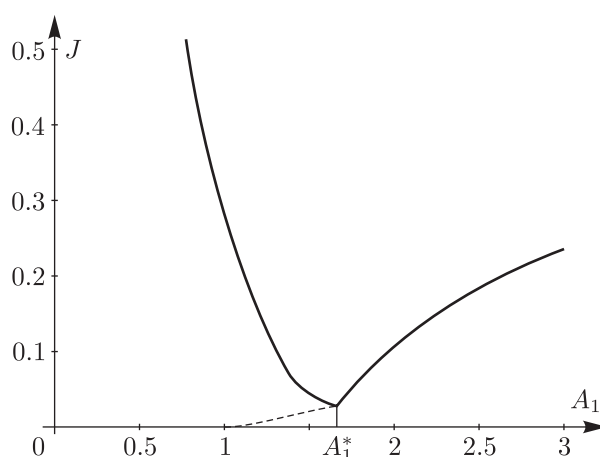


Рис. 7. Значения  $J$  при  $u = u_{\text{opt}}$  и  $u = u_*$  в зависимости от значения  $A_1$  для возмущения в форме полуволны синуса.

Таким же способом рассчитывались значения  $J(u_{\text{opt}})$  и  $J(u_*)$  для возмущения треугольной формы в общем случае (при  $b \neq 0$ ). Время  $\bar{T}$  движения изолируемого объекта относительно основания, фигурирующее в соотношении (5.32), для возмущения треугольной формы определяется равенством  $\bar{T} = \max[1, 2/A_3]$ . Качественно зависимости величин  $J(u_{\text{opt}})$  и  $J(u_*)$  от параметра  $A_3$  не отличаются от зависимостей, изображенных на рисунке 6, отвечающем случаю  $b = 0$ . Пороговая амплитуда  $A_3^*$  для оптимальности управления  $u_*(t)$  зависит от параметра  $b$ , возрастая при увеличении этого параметра. Если  $A_3 \geq \max(A_3^*, 2)$ , то оптимальное значение функционала  $J$  представляется формулой

$$J(u_{\text{opt}}) = J(u_*) = x(1) = \frac{1}{2} - \frac{A_3 b + 2}{3A_3}. \quad (5.34)$$

Анализ кривых, изображенных на рисунках 5–7, приводит к следующим выводам. Для каждого из трех типов внешнего возмущения существует пороговое значение амплитуды  $A_i^*$ , такое, что управление  $u_*(t)$  с постоянной силой на активном участке оптимально при  $A_i \geq A_i^*$  и неоптимально при  $A_i < A_i^*$ . При приближении значения  $A_i$  к нулю величина  $J(u_*)$  неограниченно возрастает, в то время как величина  $J(u_{\text{opt}})$  равна нулю при  $A_i < 1$ .

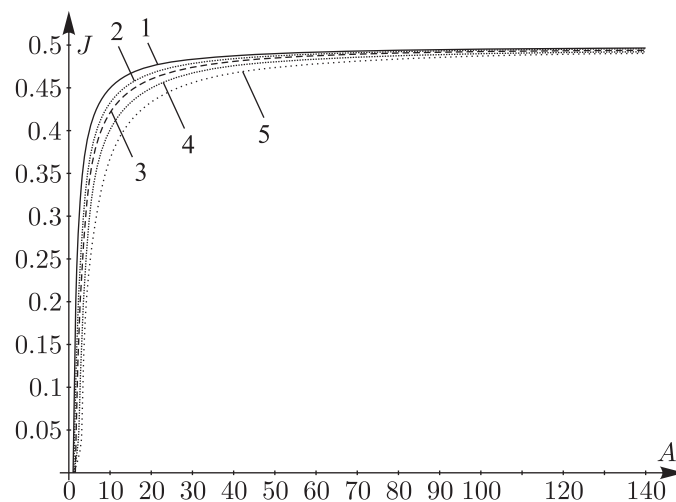
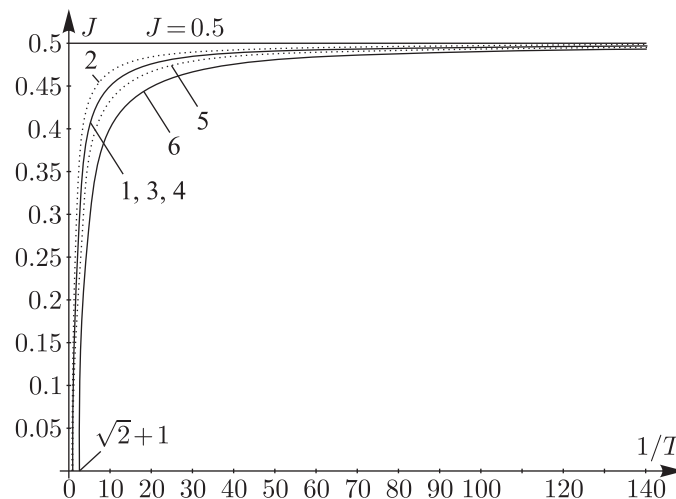
Отметим, что при  $A_i = A_i^*$  выполняется соотношение

$$\max_{t \in [0, \bar{T}]} x_{u_*}(t) = - \min_{t \in [0, \bar{T}]} x_{u_*}(t). \quad (5.35)$$

#### 5.4. Сравнение качества оптимальной противоударной изоляции для возмущений различной формы

На рисунке 8 показана в безразмерных переменных зависимость величины  $J(u_{\text{opt}})$  от амплитуды внешнего возмущения  $A$ , общей для возмущений всех трех рассматриваемых типов. Сплошная линия (1) отвечает возмущению прямоугольной формы, штриховая (3) — возмущению в форме полуволны синуса, а пунктирные (2, 4, 5) — возмущениям треугольной формы с различными значениями  $b$ ; кривые 2, 4 и 5 отвечают случаю  $b = 0$  (прямоугольный треугольник с вершиной прямого угла в начале координат плоскости  $(v, t)$ ),  $b = 1/A$  (симметричное возмущение) и  $b = 2/A$  (прямоугольный треугольник с вершиной прямого угла в точке  $(0, 2/A)$ , отвечающей моменту окончания возмущения, плоскости  $(v, t)$ ). Из графиков на рисунке 8 видно, что наихудшее (соответствующее максимальному значению  $J(u_{\text{opt}})$ ) возмущение при всех  $A > 1$  — возмущение прямоугольной формы, затем (в порядке улучшения) идут возмущение в форме прямоугольного треугольника с вершиной в начальной точке, возмущение в форме полуволны синуса, симметричное возмущение треугольной формы и возмущение в виде прямоугольного треугольника с вершиной в конечной точке графика  $v(t)$ , которое является наилучшим среди рассмотренных типов внешних воздействий. Все кривые сходятся на оси абсцисс при  $A = 1$ . При  $A \leq 1$  для любого возмущения выполняется равенство  $J(u_{\text{opt}}) = 0$ . При неограниченном возрастании амплитуды  $A$  все кривые стремятся к значению  $1/2$ , которое отвечает минимальному значению функционала  $J$  для возмущения  $v = \delta(t)$ , моделирующего мгновенный удар в начальный момент времени.

Интересно также сравнить предельные возможности противоударной изоляции для возмущений различной формы, имеющих одинаковую длительность  $T$ . Длительности возмущений и их амплитуды в безразмерных переменных связаны соотношениями  $T = 1/A$ ,  $T = 2/A$  и  $T = \pi/(2A)$  для возмущений прямоугольной формы, треугольной формы и в форме полуволны синуса соответственно. На рисунке 9 показана зависимость значения  $J(u_{\text{opt}})$  от величины  $1/T$  для возмущений различных типов. Соответствие номера кривой типу возмущения — такое же, как на рисунке 8. Под номером 6 изображена кривая  $J_{\text{inf}}(1/T) = 1/2 - T$ ,

Рис. 8. Сравнение значений  $J(u_{\text{opt}})$  для различных возмущений одинаковой амплитуды.Рис. 9. Сравнение значений  $J(u_{\text{opt}})$  для различных возмущений одинаковой длительности.

которая в безразмерных переменных представляет нижнюю грань (по всем возмущениям класса, описанного в разделе 2) оптимальных значений минимизируемого функционала  $J$  в зависимости от длительности возмущения при  $T < \sqrt{2} - 1$  ( $1/T > \sqrt{2} + 1$ ). В исходных размерных переменных величина  $J_{\text{inf}}$  определена в (3.20).

Кривая для прямоугольного возмущения совпадает с соответствующей кривой на рисунке 8. Кривые для возмущений треугольной формы получаются сжатием соответствующих кривых на рисунке 8 в два раза вдоль оси абсцисс, а кривая для возмущения в форме полуволны синуса — сжатием с коэффициентом  $\pi/2$ .

Возмущения прямоугольной формы (кривая 1), треугольной формы при  $b = T/2$  (кривая 4) и в форме полуволны синуса (кривая 3) — симметричные. Согласно утверждению 2, соответствующие кривые должны совпадать при достаточно малом  $T$  (достаточно большом  $1/T$ ), что и наблюдается на рисунке 9. Утверждение 2 гарантирует совпадение кривых при  $1/T > (\sqrt{2} + 1)/2 \approx 1.207$ .

Значение  $J(u_{\text{opt}})$  равно нулю на интервале  $0 < 1/T \leq 1$  для возмущения прямоугольной формы (кривая 1), на интервале  $0 < 1/T \leq 1/2$  — для возмущений треугольной формы (кривые 2, 4, 5), на интервале  $0 < 1/T \leq 2/\pi$  — для возмущения в форме полуволны синуса (кривая 3).

При сравнении возмущений одинаковой длительности наихудшим возмущением для достаточно малых  $T$  (достаточно больших  $1/T$ ) оказалось возмущение в форме прямоугольного треугольника с  $b = 0$ , а наилучшим — возмущение в форме прямоугольного треугольника с  $b = T$ .

## 6. Выводы

Рассмотрена задача о предельных возможностях противоударной изоляции объекта, расположенного на прямолинейно движущемся основании. Считается, что защищаемый объект перемещается относительно основания вдоль той же прямой, по которой движется основание. До удара объект покоится относительно основания. Ударное воздействие на основание моделируется его ускорением, заданным как функция времени. Ищется оптимальный закон управления движением объекта относительно основания, при котором модуль абсолютного ускорения объекта не превосходит заданной величины, а максимум модуля смещения объекта относительно основания — минимален. Предполагается, что длительность ударного воздействия конечна, ускорение основания не меняет знака, а его интеграл по времени задан. Кроме того, предполагается, что ускорение основания превышает по величине максимально допустимое абсолютное ускорение объекта только на одном интервале времени.

Установлено, что при достаточно малой продолжительности ударного воздействия оптимальное движение объекта происходит с постоянным абсолютным ускорением, максимально допустимым по величине, от момента удара до момента полного прекращения движения относительно основания. Модуль смещения объекта относительно основания в этот момент времени есть оптимальное значение минимизируемого критерия. Дана оценка снизу для порогового значения длительности ударного воздействия, которая зависит только от изменения скорости основания в результате удара и максимально допустимого значения модуля абсолютного ускорения защищаемого объекта и не зависит от формы ударного воздействия. Значение минимизируемого функционала в общем случае существенно зависит от формы ударного воздействия. Дана оценка возможного разброса значений минимизируемого критерия при изменении формы ударного воздействия.

Если функция, описывающая ударное воздействие, — четная относительно серединного момента его продолжительности, то при ударах достаточно малых продолжительностей, когда движение объекта происходит с постоянным абсолютным ускорением до момента прекращения относительного движения, оптимальное значение минимизируемого критерия от формы воздействия не зависит. Для таких ударных воздействий получена более высокая оценка порогового значения длительности, чем для общего случая.

Исследована зависимость минимума максимальной величины относительного смещения объекта от формы внешнего возмущения. Рассматривались возмущения треугольного и прямоугольного профилей, а также возмущения в виде полуволны синуса. Установлено, что среди возмущений, характеризующихся одинаковыми достаточно большими амплитудами и приводящих к одному и тому же изменению скорости основания, наименее опасным является возмущение в форме прямоугольного треугольника с вершиной прямого угла

в точке, отвечающей моменту окончания удара, а наиболее опасным — прямоугольное возмущение. Среди возмущений, характеризующихся одинаковыми достаточно малыми длительностями и приводящих к одному и тому же изменению скорости основания, наименее опасным является возмущение в форме прямоугольного треугольника с вершиной прямого угла в точке, отвечающей моменту окончания удара, а наиболее опасным — возмущение в форме прямоугольного треугольника с вершиной прямого угла в точке, отвечающей начальному моменту времени. Возмущения прямоугольной формы и в форме полуволны синуса, будучи симметричными, представляют одинаковую опасность.

Была создана программа на языке Matlab для расчета оптимального управления и соответствующего относительного смещения. Программа позволила провести точные расчеты задачи для различных внешних воздействий и определить области параметров задачи, в которых управление с постоянной силой на активном участке оптимально. Результаты расчетов позволили провести сравнение влияния различных форм воздействий на минимальное значение максимального смещения защищаемого объекта относительно основания.

## Список литературы

- [1] Гурецкий В. В. Об одной задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 1, с. 159–162.
- [2] Гурецкий В. В. О задаче минимизации максимального смещения // Тр. ЛПИ. Механика и процессы управления, 1969, № 307, с. 11–21.
- [3] Sevin E., Pilkey W. Optimum shock and vibration isolation. Washington, D.C.: Shock and Vibration Information Analysis Center, 1971. 162 pp.
- [4] Коловский М. З. Автоматическое управление виброзащитными системами. Москва: Наука, 1976. 320 с.
- [5] Болотник Н. Н. Оптимизация амортизационных систем. Москва: Наука, 1983. 256 с.
- [6] Balandin D. V., Bolotnik N. N., Pilkey W. D. Optimal protection from impact, shock, and vibration. Amsterdam: Gordon and Breach Sci., 2001. 440 pp.
- [7] Pilkey W. D., Balandin D. V., Bolotnik N. N., Crandal J. R., Purtsezov S. V. Injury biomechanics and control: Optimal protection from impact. Hoboken, N.J.: Wiley, 2010. 286 pp.

## Limiting performance analysis of shock isolation for transient external disturbances

Nikolay N. Bolotnik<sup>1</sup>, Vseslav A. Korneev<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>A. Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS) pr. Vernadskogo, 101, block 1, Moscow, 119526, Russia

<sup>1</sup>bolotnik@ipmnet.ru, <sup>2</sup>korneev@ipmnet.ru

A single-degree-of-freedom model is used to analyze the limiting performance of a shock isolation system for protecting an object on a moving base from impact pulses undergone by the base. The efficiency of the shock isolation as a function of the shape of the impact pulse is studied. By the shape of the impact pulse, the time history of the impact-induced acceleration of the base is understood. The shock isolator is controlled by a force acting between the object and the base. A constraint is imposed on the absolute value of the control force. The maximum absolute value of the displacement of the object relative to the base is used as the performance index of isolation. It is assumed that the shock pulses have finite durations, do not change in the action direction, and may exceed the maximum value allowed for the object's absolute acceleration

in one time interval at most. The change in the velocity of the base due to an impact is assumed to be given. It is shown that if the pulse duration is small enough, then, independently of the pulse shape, the control is performed by a constant force from the beginning of the impact pulse to the instant at which the motion of the object relative to the base stops. A class of shock pulses, within which the optimal control and the performance index do not depend on the pulse shape, is singled out. The minimum value of the maximum displacement of the object relative to the base calculated for the constrained control force is studied as a function of the pulse shape for a number of parametric families of pulses.

MSC 2010: 70Qxx, 70Q05

Keywords: shock isolation, optimal control, limiting performance analysis

Received August 11, 2014, accepted November 17, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 147–168 (Russian)